BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

№3 *Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası* **2007**

О ПОВЕДЕНИИ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В НЕОГРАНИЧЕННЫХ ОБЛАСТЯХ

Т.С.ГАДЖИЕВ, Х.А.САЛАМОВ

Бакинский Государственный Университет

Нелинейные уравнения гиперболического типа описывают различные процессы. В частности, уравнения газовой динамики, распространение возмущений в вязких средах приводятся к гиперболическим уравнениям. В данной работе рассматривается нелинейное гиперболическое уравнение второго порядка в неограниченной области. Для обобщенных решений этой задачи с бесконечным интегралом энергии получаются энергетические оценки типа Сен-Венана.

В данной работе рассматривается нелинейное гиперболическое уравнение второго порядка в неограниченной области. Изучаются решения в различных классах таких областей. Предположим, что Ω-неограниченная область из R^n, $n \geq 2$, с некомпактной кусочно гладкой границей $\partial\Omega$, $Q_T = \Omega \times (0,T)$, $T < \infty$, $\partial Q_T = \partial\Omega \times (0,T)$. В Q_T рассмотрим смешанную задачу

$$u_{tt} - \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(t,x,u,u_x)\right) = f(x,t) \tag{1}$$

$$u\big|_{t=0} = u_t\big|_{t=0} = 0 \tag{2}$$

$$u\big|_{\partial Q_T} = 0 \tag{3}$$

Относительно коэффициентов потребуем, что $a_{ij}(t,x,u,p)$ строго монотонная и

$$a_{ij}(t,x,u,p) \in C^1\left(R^n\right) \tag{4}$$

$$\left(a_{ij}(t,x,u,p) - a_{ij}(t,x,u,q)\right)\left(p_i - q_i\right) \geq \nu|p-q|^2 \tag{5}$$

для всех $p,q \in R^n$, ν -положительная константа, $|p| = \left(p_1^2 + \ldots + p_n^2\right)^{1/2}$.

$$\left|\frac{\partial a_{ij}}{\partial p_i}\right| \leq M_1, \left|\frac{\partial a_{ij}}{\partial t}\right| \leq M_2 \tag{6}$$

для всех $p \in R^n$,

$$a_{ij}(t,x,u,u_x)\xi_i\xi_j \ge \nu|\xi|^2 \text{ для всех } p,\xi \in R^n, \left|a_{ij}\right| \le M_1 \qquad (7)$$

Пусть Q'_T -любая ограниченная подобласть $Q'_T = \Omega' \times (0,T)$ и предположим, что $f(x,t) \in L_2(Q'_T)$.

Нелинейные гиперболические уравнения описывают различные процессы. В частности, уравнения газовой динамики, распространение возмущений в вязких средах приводятся к гиперболическим уравнениям. В линейном случае уравнения типа (1) изучены в работах [1], [2] и др. В данной работе для обобщенных решений данной задачи с бесконечным интегралом энергии получаются энергетические оценки типа Сен-Венана. Заметим, что для линейных эллиптических и параболических уравнений аналогичные оценки получены в работах О.А.Олейник и ее учеников [3], для стационарных уравнений Стокса и Навье-Стокса в работах [4].

Введем некоторые обозначения $W_2^{1,1}(Q_T)$ пространства, состоящее из функций, имеющих обобщенные производные вида u_{tx_i} из $L_2(Q_T)$. Если $\Gamma \subset \partial Q_T$, то $\overset{0}{W}{}_2^{1,1}(Q_T,\Gamma)$ множество функций из $W_2^{1,1}(Q_T)$, обращающихся в нуль в окрестности $\partial Q_T \setminus \Gamma$. $Q_T(\tau) = Q_T \cap \{(x,t): |x| < \tau\}$, $\Omega_{t_0} = Q_T \cap \{(x,t): t = t_0\}$, $\Omega_t(\tau) = Q_t(\tau) \cap \Omega_t$, $S(\tau) = \partial Q_T(\tau) \setminus \partial Q_T$, $\sigma_t(\tau) = S(\tau) \cap \Omega_t$.

Введем понятие основной частоты, с помощью которого описываем геометрию ∂Q_T

$$\lambda^2(\tau) = \inf\left(\int_{\sigma_t(\tau)} |\nabla v|^2 d\sigma\right)\left(\int_{\sigma_t(\tau)} v^2 d\sigma\right)^{-1},$$

где нижняя грань берется по всем непрерывно дифференцируемым в окрестности $\sigma_t(\tau)$ функциям $v(x,t)$, обращающимся в нуль в окрестности ∂Q_T. Пусть $\lambda^2_{\mu(s)}(\tau) = \lambda^2(\tau) + \mu^2(s)$, где функция $\mu(s) \in C^1(R)$, $\mu(s) \ge \alpha_0 \ge 0$, $\mu'(s) \ge 0$. Относительно функции $\mu(s)$ требуем выполнение условия

$$4B(s)\mu\mu' T \le \theta < 1, \qquad (8)$$

где $B(s)$ непрерывная, положительная функция, удовлетворяющая условию $\left(\frac{1}{2}\alpha_0^{-1} + \mu_1\right)\lambda^{-1}_{\mu(s)}(s)k^{-1} \le B(s)$, где $k = \min(1,\nu)$.

Функцию $u(x,t) \in \overset{0}{W}{}_2^{1,1}(Q_T)$ назовем обобщенным решением задачи (1)-(3), если справедливо интегральное тождество

$$\int_{Q_T(\tau)} \left(-u_t\eta_t + a_{ij}(t,x,u,u_x)\eta_{x_i}\right)dxdt = \int_{Q_T(\tau)} f(x,t)\eta\, dxdt \qquad (9)$$

для любой функции $\eta(x,t) \in W_2^{1,1}(Q_T(\tau), \partial Q_T)$, равной нулю при $t = T$, и выполнены начальные условия и интегральное тождество верно для любого $\tau > 0$.

Предположим, что $f(x,t) = 0$ в $Q_T(\tau_0)$ для некоторого $\tau_0 > 0$.

Теорема 1. Предположим, что $u(x,t) \in \overset{0}{W}{}_2^{1,1}(Q_T)$-обобщенное решение задачи (1)-(3). Относительно коэффициентов выполняются условия (4)-(7), а функция $\mu(\tau)$ удовлетворяет условию (8). Тогда при любых τ_1, τ_2, где $0 < \tau_1 < \tau_2 < \tau_0$, верна оценка

$$I_{t_1}(\tau_1) \le \exp\left(-\theta_0 \int_{\tau_1}^{\tau_2} B^{-1}(s)ds \right) I_{t_1}(\tau_2), \tag{10}$$

где $\theta_0 = 1 - \theta$, $0 < t_1 \le T$,

$$I_t(\tau) = \int_{Q_T(\tau)} \left(\mu^2(\tau)\left(u_t^2 + |\nabla u|^2 \right) \right) \exp\left(-2\mu^2(\tau)t \right) dxdt .$$

Доказательство. Приведем схему доказательства. Пусть $\varphi_\tau(|x|) = \psi_h(|x|/\tau)$ срезающие функции, где $\psi_h(s) = \psi((h-s)/(h-1))$, а $\psi(\tau)$-непрерывно дифференцируемая функция, удовлетворяющая условиям $\psi(\tau) = 1$ при $\tau \le 1/3$; $\psi(\tau) = 0$ при $\tau \ge 2/3$; $0 < \psi(\tau) < 1$ при $1/3 < \tau < 2/3$, кроме того, $\left| \frac{\partial}{\partial x_i} \varphi_\tau(|x|) \right| \le c_1 (\tau \xi(\tau))^{-1}$ при $\tau(1 + 1/3\,\xi(\tau)) < |x| < \tau(1 + 2/3\,\xi(\tau))$, $\left| \frac{\partial}{\partial x_i} \varphi_\tau(|x|) \right| = 0$ при $|x| \le \tau(1 + 1/3\,\xi(\tau))$ и $|x| \ge \tau(1 + 2/3\,\xi(\tau))$.

Подставим в тождество (9) $\eta(x,t) = u_t(x,t)\varphi_\tau(|x|)\exp\left(-2\mu^2(\tau)t\right)$. Далее, используя условия на коэффициенты и проведя соответствующие оценки, получим требуемое утверждение.

Пусть область $Q_T = \cup Q_T(\tau_k)$, где $Q_T(\tau_k)$ семейство конечных подобластей Q_T и при $k \to \infty$ $\tau_k \to +\infty$.

Приведем теорему единственности решения задачи (1)-(3) в Q_T.

Теорема 2. Предположим, что $u(x,t) \in \overset{0}{W}{}_{2,loc}^{1,1}(Q_T)$ - обобщенное решение задачи (1)-(3). Относительно коэффициентов выполняются условия (4)-(7), а функция $\mu(\tau)$ удовлетворяет условию (8) и для последовательности чисел τ_k верны неравенства

$$I_T(\tau_k) \le \varepsilon(\tau_k) \exp\left(-\theta_0 \int_{\tau_0}^{\tau_k} B^{-1}(s)ds \right), \tag{11}$$

где $\varepsilon(\tau_k) \to 0$ при $k \to \infty$. Тогда $u(x,t) \equiv 0$ в Q_T.

Доказательство. Доказательство получается стандартно с использованием неравенства (10).

Обозначим $\lambda^2_{k,k-i}(\tau) = \lambda^2(\tau_k) + \mu^2(\tau_{k-i})$, $\lambda^2_{k,k} = \lambda^2_k$.

Теорема 3. Предположим, что выполняются условия (4)-(7), функция $\mu(\tau)$ удовлетворяет условию (8), а функция $f(x,t)$ удовлетворяет условию

$$\int\limits_{Q_T(\tau_{k+1})} f^2(x,t)\lambda^2_{k+1,k}\,dxdt \le M \exp\left[(\theta_0 - \varepsilon)\int\limits_{\tau_0}^{\tau_1} B^{-1}(s)ds\right] \tag{12}$$

с некоторыми $M, \varepsilon > 0$. Тогда задача (1)-(3) имеет обобщенное решение $u(x,t) \in \overset{0}{W}{}^{1,1}_{2,loc}(Q_T)$ и это решение $u(x,t)$, $u_t(x,t)$ и $\nabla_x u(x,t)$ непрерывны по t в норме $L_2(Q_T(\tau_k))$.

Доказательство. Для доказательства переходим к усредненным функциям. В качестве пробной функции $\eta(x,t)$ возьмем

$$\eta^h(x,t) = \frac{1}{h}\int\limits_{t-h}^{t} \eta(x,s)ds,$$

где $\eta(x,t) \in \overset{0}{W}{}^{1,1}_2(Q_{t-h}(\tau))$, с компактным носителем при $t > T-h$ и $t < 0$. Подставляя в интегральное тождество (9) специально подобранную пробную функцию и ведя соответствующие интегральные оценки, далее, переходя к пределу при $h \to 0$ получим требуемое утверждение.

ЛИТЕРАТУРА

1. H. Sarason. Trans. Amer. Math. Soc., 1980, 261:2, p.387-410
2. S.Osher. Trans. Amer. Math. Soc., 1973, 176, p.141-164
3. Олейник О.А., Радкевич Е.В. Метод введение параметра для исследования эволюционных уравнений. УМН, 1978, т.33, №5, с.7-76.
4. Ладыженская О.А., Солонников В.А. О нахождении решений краевых задач для стационарных уравнений Стокса и Навье-Стокса, имеющих непрерывные интегралы. Краевые задачи мат. функции. Л. Наука-1980, 12, с.117-160

QEYRİ-XƏTTİ HİPERBOLİK TƏNLİKLƏRİN HƏLLİNİN HÜDUDSUZ SAHƏLƏRDƏ DAVRANIŞI HAQQINDA

T.S.HACIYEV, H.A.SALAMOV

XÜLASƏ

Qeyri-xətti hiperbolik tipli tənliklər müxtəlif prosesləri təsvir edir. Məsələn, qatı hiddətlənmənin qatı münitlərdə yayılması, qaz dinamikası tənlikləri hiperbolik tənliklərə şamil edilir. Hazırkı işdə hüdudsuz sahələrdə ikinci tip qeyri-xətti tənlik nəzərdən keçirilib. Bu məsələnin enerjinin sonsuz inteqralı ilə

ümumi həllini tapmaq üçün San-Venan tipli energetiк qiymətləndirmələr əldə edilir.

ABOUT THE BEHAVIOR OF NON LINEAR HYPERBOLIC EQUATIONS' SOLUTIONS IN UNBOUNDED AREAS

T.S.HAJIYEV, H.A.SALAMOV

SUMMARY

Non linear hyperbolic equations describe various processes. In particular, gaze dynamic equation, disturbance propagation in viscous medium are reduced to hyperbolic equations. In this work we are viewing non linear hyperbolic equation of second order in unbounded area. For general resolve of this task with infinitive integral of energy we are getting of Sen-Venan type energy estimation.